LE CALCUL DE LA PROFONDEUR EN RADIOLOCALISATION

de la théorie à la pratique

par Jean-Louis AMIARD*

____

1. INTRODUCTION

Rappelons que la radiolocalisation consiste à déterminer en surface la position de la verticale du point d'une cavité où a été installée une balise émettrice, et de calculer sa profondeur avec la meilleure précision possible, dans le but de rectifier la topo ou d'ouvrir un nouvel accès au réseau pour diverses raisons : facilité d'accès, projet d'aménagement touristique, opération de secours…

Le présent article rappelle les notions théoriques qui ont permis d'élaborer la formule de calcul donnant la profondeur en fonction de l'angle d'inclinaison des lignes de champ. Quelques conseils seront donnés dans le but de réduire les erreurs de mesure.

2. FORMULES UTILISABLES

Les sources présentant la formule de calcul ne sont pas nombreuses. Au printemps 1988, le n° 12 du bulletin du CDS 19 « S. C. Infos » présentait la description de l'ARCANA, Appareil de Repérage de Cavités Artificielles et Naturelles Accessibles, dans laquelle je développais le raisonnement qui conduit à l'élaboration de la formule donnant l'expression de la profondeur « d » en fonction de l'inclinaison « α » de la ligne de champ par rapport à l'horizontale et de la distance « l » par rapport à la verticale du point d'émission :

$$d = k_{(\alpha)}\, l \quad \text{avec} \quad k_{(\alpha)} = \frac{3\, tg\, \alpha + \sqrt{9\, tg^2 \alpha + 8}}{4}$$

Dans d'autres publications, en particulier britanniques, comme « Radio Communication » de janvier 1995 ou le « CREG Journal » n° 104 de décembre 2018 du BCRA (British Cave Research Association), proposent une formule apparemment très différente, en se gardant bien de la démontrer : $k_{(\alpha)} = \frac{2}{\sqrt{9\, tg^2 \alpha + 8} - 3\, tg\, \alpha}$

J'en entends déjà qui disent : « Décidément, les Anglais ne font rien comme le reste du monde ».
Pas du tout : les deux formules sont strictement équivalentes ; démonstration :
multiplions les deux termes de la « fraction anglaise » par la même valeur : $\sqrt{9\ \mathrm{tg}^2\alpha + 8} + 3\ \mathrm{tg}\alpha$
et appliquons l'identité remarquable (a+b) (a-b) = $a^2 - b^2$

$$k_{(\alpha)} = \frac{2\left(\sqrt{9\, tg^2\alpha+8} + 3\, tg\alpha\right)}{\left(\sqrt{9\, tg^2\alpha+8} - 3\, tg\alpha\right)\left(\sqrt{9\, tg^2\alpha+8} + 3\, tg\alpha\right)} = \frac{2\left(\sqrt{9\, tg^2\alpha+8} + 3\, tg\alpha\right)}{9\, tg^2\alpha + 8 - 9\, tg^2\alpha} = \frac{3\, tg\, \alpha + \sqrt{9\, tg^2\alpha+8}}{4}$$

On retrouve bien la « formule corrézienne ».

3. RAPPEL SUR L'ÉLABORATION DE LA FORMULE

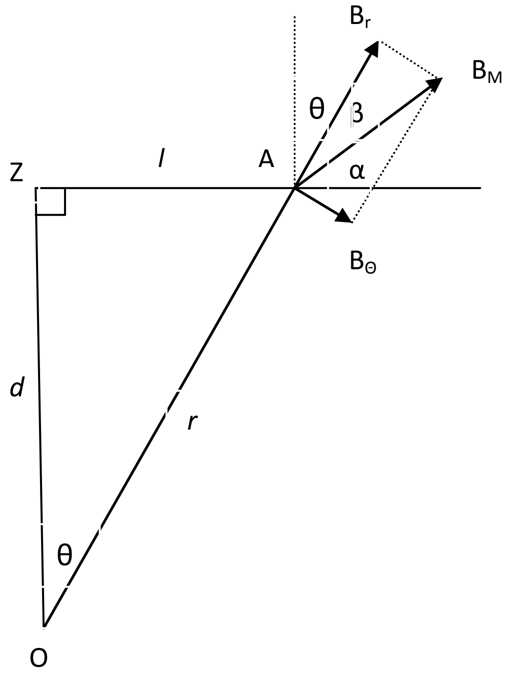
C'est là que les choses se gâtent et où l'on comprend pourquoi les publications restent discrètes sur la question : il faut entrer dans le détail du calcul du potentiel-vecteur du champ magnétique dans le plan vertical en coordonnées polaires, et faire appel à des notions mathématiques du niveau des classes préparatoires scientifiques (MPSI, PCSI, PTSI). Tant pis, lançons-nous courageusement.

Aidons-nous du chapitre 7 du cours d'électromagnétisme de Christian Carimalo, intitulé « Champ et potentiel-vecteur magnétostatiques », qui me semble plus explicite que ce qu'on peut trouver au premier abord sur Wikipédia ou Wikiuniversité.

Ce chapitre n'est qu'une petite partie du cours complet car il commence à la page 153 et se termine à la page 197, mais c'est à la page 173 que se trouve le calcul des composantes sphériques du champ magnétique B_M en tout point A de l'espace, produit par un dipôle magnétique placé au point O, constitué aussi bien d'un aimant permanent que d'une boucle de courant, possédant un moment magnétique M.

Dans le cas du radiobalisage, le dipôle magnétique est constitué, soit par un anneau mulitispires soit par un solénoïde sur noyau à haute perméabilité, avec leurs avantages et leurs inconvénients bien connus. Dans les deux cas, le point A devra se trouver à une distance suffisante du dipôle magnétique pour que les dimensions de ce dernier puissent être considérées comme négligeables. La verticalité du dipôle doit être optimale, ainsi que la valeur du moment magnétique M qui doit être maximale pour mesurer avec la meilleure précision sur le terrain l'inclinaison de la ligne de champ à laquelle le vecteur B_M est tangent au point A.

La figure ci-contre montre la décomposition du vecteur champ B_M à un point A du plan vertical passant par O, où se trouve le dipôle magnétique, de dimension réduite à un point, à une distance « *r* » de ce point, et à une profondeur « *d* » (pour « depth »).
Le point A est situé à la distance « *l* » de la verticale du point d'émission OZ et le segment OA fait un angle θ avec la verticale.
Le vecteur champ B_M fait un angle α avec l'horizontale.
Le vecteur champ B_M fait un angle β avec le prolongement du segment OA.
Au point A, le vecteur champ B_M possède deux composantes : l'une dite radiale, B_r dans le prolongement du segment OA, et l'autre orthogonale B_Θ qui lui est perpendiculaire.
Le but est de déterminer « *d* » uniquement en fonction de l'angle α et de la distance « *l* ».



D'après la p. 173 du cours précité :

$B_r = \frac{2\,\mu_0\,M\,cos\theta}{4\,\pi\,r^3}$ $\quad B_\Theta = \frac{\mu_0\,M\,sin\theta}{4\,\pi\,r^3}$

À partir d'ici, le niveau mathématique ne dépasse plus celui que possédait tout bachelier scientifique dans les années 60 à 70 (hélas, depuis, le niveau a baissé et la trigonométrie a énormément souffert des allègements de programmes !).

On voit sur la figure : *tg* β = $\frac{B_\theta}{B_r}$

En remplaçant B_Θ et B_r par leur valeur, il vient : *tg ß* = $\frac{sin\theta}{2\ cos\theta}$ = $\frac{tg\ \theta}{2}$

En examinant la figure, on s'aperçoit que la somme des angles α, β, et θ est de 90°.

On peut donc exprimer la valeur de α, en radians : α = $\frac{\pi}{2} - (\theta + \beta)$

Or, on sait (ou on devrait savoir) que $tg\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \frac{1}{tga}$ donc $tg\ \alpha\ = \frac{1}{tg(\theta+\beta)}$

Si l'on se souvient de la formule d'addition des arcs : $tg\ (a+b) = \frac{tga + tgb}{1 - tga\ tgb}$

l'expression devient : $tg\ \alpha\ = \frac{1 - tg\theta\ tg\beta}{tg\theta + tg\beta}$

Puisque $tg\, ß\ = \frac{tg\theta}{2}$, $tg\ \alpha = \frac{1 - \frac{tg^2\ \theta}{2}}{\frac{3\ tg\theta}{2}} = \frac{2 - tg^2\ \theta}{3\ tg\theta}$, ce qui peut aussi s'écrire sous la forme :

$tg^2\theta + 3\ tg\theta\ tg\alpha\ - 2 = 0$

Remplaçons tg θ par sa valeur $\frac{l}{d}$ puisque le triangle OZA est rectangle en Z,

$$\frac{l^2}{d^2} + 3\ \frac{l}{d}\ tg\alpha\ - 2 = 0$$

Multiplions les deux membres de l'équation par $-d^2$ et ordonnons par rapport à d :

$$2\ d^2 - \ 3\ l\ tg\alpha\ d - \ l^2\ = 0$$

d est la seule inconnue puisque au point A, l'angle α et la longueur l sont mesurables.

L'équation est de la forme $ax^2 + \ b\ x + c = 0$, qui a pour racines $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Voici donc les deux racines de l'équation :

$d = \frac{3\ l\ tg\alpha \pm \sqrt{9\ l^2\ tg^2\ \alpha + 8\ l^2}}{4}$ dans laquelle l peut être factorisée :

$$d = \frac{3\ tg\alpha \pm \sqrt{9\ \ tg^2\ \alpha + 8}}{4}\ l$$

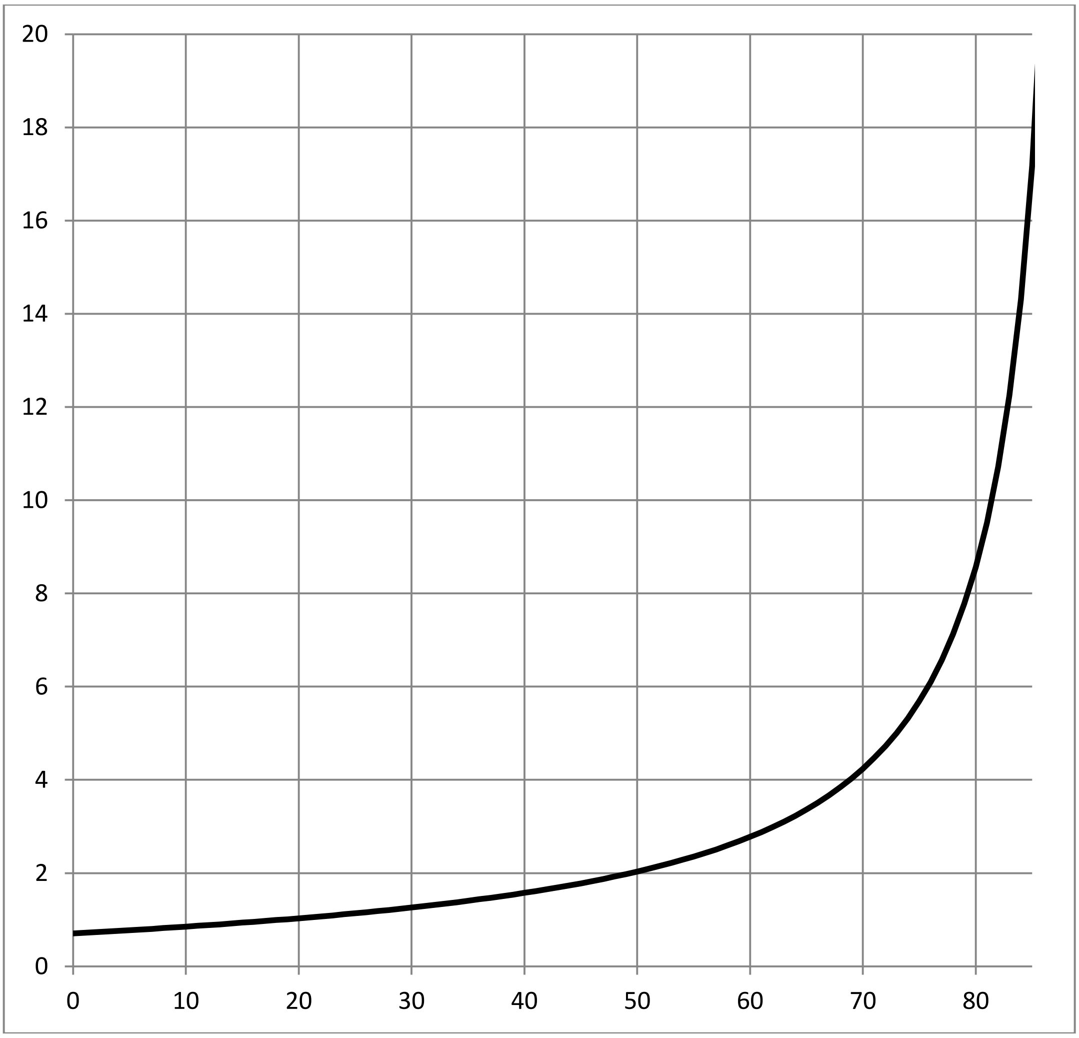
Puisque $\sqrt{9\ \ tg^2\ \alpha + 8}$ est toujours supérieur à $3\ tg\alpha$, on ne gardera que la racine positive :

$d = \frac{3\ tg\alpha + \sqrt{9\ \ tg^2\ \alpha + 8}}{4}\ l$ qui est bien de la forme $d\ = \ k_{(\alpha)}\ l$, $k_{(\alpha)}$ ne dépendant que de α.

Dans le cas particulier où $\alpha = 0$, quand la tangente à la ligne de champ est horizontale, $tg\alpha = 0$ et on obtient $d = \frac{\sqrt{8}}{4}\ l = \frac{\sqrt{2}}{2}\ l = 0{,}707\ l$: c'est la justification d'un processus quelquefois utilisé, qui consiste à rechercher le minimum de réception en s'éloignant du point Z, tout en maintenant l'antenne-cadre rigoureusement horizontale.

4. INFLUENCE DE L'ANGLE α SUR LA PRÉCISION DU CALCUL

On pourrait bien sûr calculer la dérivée de $k_{(\alpha)}$ en fonction de α, mais il est plus simple d'examiner l'allure de la courbe de cette fonction, très facile à dessiner en utilisant un tableau EXCEL, et qui est reproduite ci-dessous :



Courbe représentant $k_{(\alpha)}$ en fonction de α

Sur le graphique, où l'angle α varie de 0 à environ 85°, on s'aperçoit que la pente de la courbe, minimale pour α = 0, où $k_{(\alpha)} = 0{,}707$, reste modérée jusqu'à une trentaine de degrés : la pente moyenne est de 1,5% entre 0 et 20°. À partir d'environ 45°, la pente de la courbe augmente rapidement, puis elle devient asymptotique, tendant vers l'infini quand α s'approche de 90°.

Conclusion : sur le terrain, il conviendra de s'éloigner suffisamment du point Z pour effectuer la mesure de l'angle α, de façon de maintenir ce dernier à une valeur inférieure à une trentaine de degrés, en privilégiant la zone de 0 à 20°, où $k_{(\alpha)}$ reste inférieur à 1 et où la pente modérée de la courbe minimise l'influence de l'imprécision de mesure.

Il est donc indispensable d'utiliser un dispositif électronique sensible et précis comme le marché en propose maintenant : à prix modique, on trouve des inclinomètres faciles à étalonner et précis au dixième de degré (TOOLCRAFT). Oublions le fil à plomb et le secteur gradué ou le rapporteur !

5. MESURE DE LA DISTANCE HORIZONTALE

Sur la figure est représenté le cas idéal où les points A et Z sont sur un même plan horizontal. Or, les repérages s'effectuent rarement sur des stades et il est courant d'opérer sur des terrains plus ou moins pentus. Si tel est le cas, le segment AZ n'est plus horizontal et il faut mesurer son angle de pente pour calculer la différence de niveau entre A et Z, car la formule donne la différence de hauteur de A par rapport à O alors que celle qu'on cherche est à l'aplomb de Z.

Une solution commode, mais aussi plus onéreuse, consiste à utiliser un télémètre laser qui donne en une seule visée la distance horizontale et la différence de niveau, avec une précision du centimètre, jusqu'à plus de cent mètres. Le mien est un LASER TECH 200 un peu ancien, mais Il existe maintenant des modèles qui permettent la transmission sans fil, par Bluetooth, des données mesurées au dispositif de traitement et de stockage (microordinateur portable ou tablette de saisie). L'intérêt du système est de gagner du temps tout en minimisant le risque d'erreur de retranscription, ce qui autorise la multiplication des mesures pour diminuer la marge d'incertitude.

Sur le terrain, dans le but d'obtenir un résultat immédiat, la meilleure méthode consiste à traiter les données dans un tableau EXCEL à plusieurs lignes, préprogrammé avec la formule de calcul, et qui permet d'obtenir instantanément la profondeur calculée pour chaque mesure ainsi que la moyenne des mesures retenues.

6. BIBLIOGRAPHIE RAPIDE ET LIENS INTERNET

- http://www.zznortz.org/speleo/scinfo/scinfo12.pdf : S.C. Infos printemps 88, voir p. 73 à 82
- http://speleo-club-souillac.e-monsite.com/medias/files/arcana-scs.pdf : publication du S.C. Souillac
- https://physique-univ.fr/onewebmedia/Electromag-c7-site.pdf : chapitre 7 du cours d'électromagnétisme de Christian Carimalo.

BRIVE, décembre 2020

** Jean-Louis Amiard est ingénieur Arts et Métiers (ENSAM, Angers 67).*
Il a passé toute sa carrière professionnelle à EDF, principalement à la Production Hydraulique. Il a notamment été chef de la centrale de Grand 'Maison (Isère), la plus puissante STEP de France (Station de Transfert d'Energie par Pompage) de 1800 MW.
En 1988, il a réalisé l'ARCANA pour le compte du CDS 19 et depuis qu'il est revenu à Brive pour la retraite, et en particulier à partir de 2010, il a entrepris de le perfectionner, et il a réalisé de nombreux repérages couronnés de succès.